U.T.N. F.R.B.A. AMII CUATRIMESTRAL 1ER PARCIAL

Prof. Solá
1°c 2025

ALUMNO:

LEGAJO:

T1)a) Enunciar el teorema de derivación de la composición de funciones (regla de la cadena .b) Calcule la derivada direccional $h'((1,2),(0,6;0,8))$ sabiendo que $h(x,y) = f(\bar{g}(x,y))$ con $\nabla f(u,v) = (u-v, v-u)$, $\bar{g}(x,y) = (x^2 y, y+x)$

T2) a) Defina superficie y punto regular de una superficie. Analice si $\bar{A} = (2,1,1)$, es punto regular de la superficie de ecuación $\bar{X}(u,v) = (u, u-v, v^2)$ con $(u,v) \in R^2$ b) Halle una ecuación cartesiana y otra paramétrica del plano tangente a la superficie en el punto $\bar{A}$

P1) Dada la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(y-1)^2 sen5x}{(y-1)^2 + x^2} & si(x,y) \neq (0,1) \\ 0 & si(x,y) = (0,1) \end{cases}$$

a) Analizar la continuidad de f en $(0,1)$
b) Analizar la existencia de derivadas direccionales en (0,1)
c) La grafica de f, admite plano tangente en el punto (0,1,0)? Justificar

P2) Graficar el recinto limitado por $y - x + 2 = 0$ y la curva integral de $xy'' - y' = 0$ que en el punto $(1, y_0)$ tiene recta tangente de ecuación $y = 5 - 2x$

P3) Dada $w = f(u,v)$ con $(u,v) = (x^2 y, x - y)$, resulta $w = h(x,y)$. Calcule aproximadamente $h(1,98;1,01)$ sabiendo que f queda definida en forma implícita por $\ln(w-u) + v + w - 6 = 0$

P4) Halle los extremos absolutos de $f(x,y) = 2x(y-1) - x - y$ en el triángulo de vértices $(0,0)$; $(1,0)$; $(1,4)$ (interior y frontera)

AM2	1° parcial Prof. Solá	HOJA N° 1/3 FECHA 1C 2025

T1 a) Enunciar el teorema de derivación de la composición de funciones (Regla de la cadena)

$$\bar{g}: D_{\bar{g}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \ \bar{g} \text{ diferenciable en } \bar{A}, \ \bar{A} \in D_{\bar{g}}$$

$$f: D_f \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \ f \text{ diferenciable en } \bar{g}(\bar{A})$$

$$\Rightarrow h: D_{\bar{g}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ / \ h(\bar{A}) = (f \circ \bar{g}(\bar{A}))$$

$$\Rightarrow Dh(\bar{A}) = Df(\bar{g}(\bar{A}))\, D\bar{g}(\bar{A})$$

b) Calcular la derivada direccional $h'((1,2), (0,6 ; 0,8))$ sabiendo que $h(x,y) = f(\bar{g}(x,y))$ con $\nabla f(u,v) = (u-v, v-u)$; $\bar{g}(x,y) = (x^2 y, y+x)$

h es diferenciable $\Rightarrow Dh(x,y) = Df(\bar{g}(x,y))\, D\bar{g}(x,y)$

$$Dh(1,2) = Df(\bar{g}(1,2))\, D\bar{g}(1,2) =$$

$$= Df(2,3) \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,2)} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underset{h'_x \quad h'_y}{\begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}}$$

- $\bar{g}(1,2) = (2,3)$
- $D\bar{g}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $Df(2,3) = (2-3, \ 3-2)$

h es dif $\Rightarrow f'((1,2), (0,6 ; 0,8)) = \nabla f(1,2) \cdot (0,6 ; 0,8) =$

$$= (-3, 0)(0,6 ; 0,8) = -1,8$$

$$\boxed{f'((1,2),(0,6, 0,8)) = -1,8}$$

NOTA

#2 a) Definir superficie y punto regular de una sup.

Punto regular de una sup:

$\bar{A} \in S$, $\bar{A}$ es punto regular de S si $N_{S_A} \neq \bar{0}$

Sup. regular

$\forall \bar{x} \in S \Rightarrow \bar{x}$ es punto regular

Analizar si $\bar{A} = (2,1,1)$ es punto regular de la sup $\overline{S}$ de ecuación:

$\bar{X}(u,v) = (u, u-v, v^2)$ con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

$\bar{A} \in S \Rightarrow (2,1,1) = (u_0, u_0 - v_0, v_0^2) \longrightarrow \begin{matrix} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{matrix}$

Hallo N_{S_A}: $\bar{X}'_u = (1,1,0) \rightarrow \bar{X}'_{u(2,1)} = (1,1,0)$

$\bar{X}'_v = (0,-1,2v) \rightarrow X'_v(2,1) = (0,-1,2)$

$N_{SA} = \bar{X}'_u \times \bar{X}'_v = (2,-2,-1) \neq (0,0,0) \Rightarrow$ $\boxed{\bar{A} \text{ es punto regular de S}}$

b) Hallar una ecuación cartesiana y otra paramétrica del plano tangente a la sup en el punto $\bar{A}$

ec. plano:

$N(x,y,z) = N \cdot A$

$(2,-2,-1)(x,y,z) = (2,-2,-1)(2,1,1)$

$\boxed{2x - 2y - z = 1} \rightarrow z = 2x - 2y - 1$

$\boxed{PT: \bar{J}(x,y) = (x, y, 2x-2y-1)}$ $x, y \in \mathbb{R}$

(P1) Dada la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(y-1)^2\,\mathrm{sen}(5x)}{(y-1)^2+x^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,1)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,1)\end{cases}$$

a) Analizar la continuidad de f en $(0,1)$

- $f(0,1)=0$
- ¿$\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$? $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \underbrace{\dfrac{(y-1)^2}{(y-1)^2+x^2}}_{acot}\underbrace{\mathrm{sen}(5x)}_{\to 0} = 0$

$f(0,1)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) \Rightarrow \boxed{f \text{ es continua en } (0,1)}$

b) Analizar la existencia de derivadas direccionales en $(0,1)$

$\check{r}=(a,b)$, $a^2+b^2=1$

$$f'((0,1),\check{r})=\lim_{h\to0}\frac{f((0,1)+h\check{r})-\overbrace{f(0,1)}^{0}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(ha,hb+1)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\frac{(hb+1-1)^2\,\mathrm{sen}(5ha)}{(hb+1-1)^2+h^2a^2}=\lim_{h\to0}\frac{1}{\cancel{h}}\frac{\cancel{h^2}b^2\,\mathrm{sen}(5ha)}{\cancel{h^2}\underbrace{(a^2+b^2)}_{1}}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{b^2\,\mathrm{sen}(5ha)}{h}\xrightarrow{\text{si } a=0}\lim=0$$

$$\xrightarrow{\text{si } a\neq0}\lim_{h\to0}b^2\underbrace{\frac{\mathrm{sen}(5ha)}{h\,5a}}_{\to1}5a=5ab^2$$

$$\boxed{f'((0,1),\check{r})=\begin{cases}0 & \text{si } a=0\\ 5ab^2 & \text{si } a\neq0\end{cases}}$$

f derivable en $(0,1)$

c) ¿La gráfica de f admite plano tangente en el punto $(0,1,0)$?

NO. f NO es diferenciable en $(0,1)$.

Si f fuese diferenciable $\Rightarrow f'\left((0,1),\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)\right)=\nabla f_{(0,1)}\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=$

$$=(0,0)\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=0$$

$\nabla f_{(0,1)}=(0,0)$

$$\text{S/ definición} \rightarrow a=b=\frac{1}{\sqrt2}\rightarrow f'_{((0,1),r)}=5\frac{1}{\sqrt2^{3}}$$ $\neq$

NOTA

P2 Graficar el recinto limitado por $y - x + 2 = 0$ y la curva integral de $xy'' - y' = 0$ que en el punto $(1, y_0)$ tiene tangente de ecuación $y = 5 - 2x$.

Punto $(1, y_0) \rightarrow y_0 = 5 - 2 \times 1 = 3 \rightarrow y_0 = 3 \rightarrow$ punto $(1,3)$

$y(1) = 3 \quad , \; y'(1) = -2$

$\boxed{y' = w}$

$xw' - w = 0 \rightarrow xw' = w = x \frac{dw}{dx}$

$\frac{dx}{x} = \frac{dw}{w}$

$\ln(x) + c = \ln(w)$

$e^{\ln(x)} e^{c} = e^{\ln w}$

$\boxed{kx = w}$

$y'_{(1)} = -2 = k \times 1 \rightarrow k = -2$

$\boxed{w = -2x}$

$y = \int w$

$y = \int -2x \, dx = -x^2 + c$

$y = -x^2 + c \Rightarrow y_{(1)} = 3 = -1^2 + c \rightarrow c = 4$

$$\boxed{y = 4 - x^2}$$

Comprobación

$y' = -2x$

$y'' = -2$

$\Big\} \; xy'' - y' = x(-2) - (-2x) = -2x + 2x = 0$ ✓

NOTA

AM2	1º parcial Prof. Solá	HOJA Nº 3/3 FECHA 12 2025

P3. Dada $w = f(u,v)$ con $(u,v) = (x^2y, x-y)$ resulta $w = h(x,y)$. Calcular, aprox, $h(1.98; 1.01)$ sabiendo que f queda definida en forma implícita por $\ln(w-u) + v + w - 6 = 0$

Sea $\bar{g}(x,y) = (x^2y, x-y) \Rightarrow w = h(x,y) = f(u,v) = f(\bar{g}(x,y))$

$\bar{g} \in C^1$ pues tiene componentes polinómicas

$$\underbrace{h(x,y) = f(\bar{g}(x,y))}$$

$f \in C^1$ x TFI

h $\in C^1$ pues es composición de funciones C^1

pl. tang de h en (2,1)

$$Dh(x,y) = Df(\bar{g}(x,y))\, D\bar{g}(x,y)$$

$$Dh(2,1) = Df(\bar{g}(2,1))\, D\bar{g}(2,1) =$$

$$= Df(4,1)\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = [3 \quad 5] = [h'_x(2,1) \quad h'_y(2,1)]$$

pl. tg.: $z = h(2,1) + h'_x(2,1)(x-2) + h'_y(2,1)(y-1) =$

$= 5 + (x-2) - (y-1) \rightarrow \boxed{z = x - y + 4}$

C.A. $\bar{g}(2,1) = (4,1)$ $\qquad h(2,1) = w = 5$

$$D\bar{g}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow D\bar{g}(2,1) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\bar{\nabla} f(4,1)$ x TFI $\rightarrow$ $u = 4$, $v = 1$ $\rightarrow$ $F(u,v,w) = \ln(w-u) + v + w - 6$

$F(4,1,w) = 0 = \ln(w-4) + 1 + w - 6$

$w = 5$ $\qquad w = 5$

$F'_u = \frac{-1}{w-u} \rightarrow F'_u(4,1,5) = -1$

$F'_v = 1 \rightarrow F'_v(4,1,5) = 1$

$F'_w = \frac{1}{w-u} + 1 \rightarrow F'_w(4,1,5) = 1$

$f'_u(4,1) = -\frac{-1}{1} = 1$

$f'_v(4,1) = -\frac{1}{1} = -1$

$Df(4,1) = [1 \quad -1]$

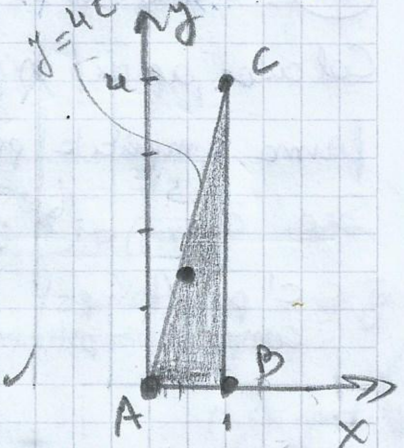
---

ec. pl. tg. a h en $(2,1,h(2,1)) \rightarrow z = x - y + 4$

$h(1.98, 1.01) \cong 1.98 - 1.01 + 4 \cong 4{,}97$ $\qquad \boxed{h(1.98, 1.01) \cong 4{,}97}$

NOTA

(P4) Hallar los extremos absolutos de $f(x,y) = 2x(y-1) - x - y$ en el triángulo de vértices $\underset{A}{(0,0)}$; $\underset{B}{(1,0)}$; $\underset{C}{(1,4)}$ (interior y frontera)



• INTERIOR (extremos libres)

$$f'_x = 2(y-1) - 1 = 0 = 2y - 3 \rightarrow \boxed{y = 3/2}$$

$$f'_y = 2x - 1 = 0 \rightarrow \boxed{x = 1/2} \qquad \boxed{PC_1 = (1/2, 3/2)}$$

∈ Interior ✓

• BORDE

extremos de la parametrización

a) $\overline{AB}$: $\bar{\alpha}(t) = (t,0)$ $t \in [0,1]$ $\rightarrow \boxed{PC_2 = (0,0),\ PC_3 = (1,0)}$

$h_1(t) = f(\bar{\alpha}(t)) = 2t - t = t \rightarrow h_1(t) = t \rightarrow h_1'(t) = 1 \neq 0$

b) $\overline{BC}$: $\bar{\beta}(t) = (1,t)$ $t \in (0,4)$ $\rightarrow h_2(t) = f(\bar{\beta}(t)) = \overbrace{2(t-1)}^{2t-2} - 1 - t$

$h_2(t) = t - 3 \rightarrow h_2'(t) = 1 \neq 0$ $\qquad \boxed{PC_4 = (1,4)}$ extremo de la param

c) $\overline{AC}$: $\bar{\gamma}(t) = (t, 4t)$ $t \in [0,1]$

$h_3(t) = f(\bar{\gamma}(t)) = 2t(4t-1) - t - 4t = 8t^2 - 2t - 5t$

$h_3(t) = 8t^2 - 7t \rightarrow h_3'(t) = 16t - 7 = 0 \rightarrow \boxed{t = 7/16}$

$$\boxed{PC_5 = \bar{\gamma}(7/16) = (7/16, 7/4)}$$

x teorema de Weierstrass (T. del compacto) se puede asegurar que hay máximo y mínimos absolutos evaluando f en los PC

$f(PC_1) = f(1/2, 3/2) = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right) - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -3/2 = -1{,}5$

$f(PC_2) = f(0,0) = 0$

$f(PC_3) = f(1,0) = 2(-1) - 2 = -4$ Min

$f(PC_4) = f(1,4) = 2(4-1) - 1 - 4 = 1$ Max

$f(PC_5) = f(7/16, 7/4) = 2 \cdot \frac{7}{16}\left(\frac{7}{4} - 1\right) - \frac{7}{16} - \frac{7}{4} = -\frac{49}{32}$

f alcanza máx absoluto en (1,4) y vale 1

f alcanza min. absoluto en (1,0) y vale -4

NOTA